Vektor-Geometrie

Koordinatengeometrie

Prüfungsaufgaben

unter Verwendung von Abbildungsgleichungen

Prüfungsaufgaben der Abschlussprüfung an Realschulen in Bayern!
mit ausführlichen Musterlösungen

und Querverweise auf Theoriedateien der Mathe-CD

Bisher 6 Aufgaben mit sehr ausführlichen Lösungen
Weitere folgen.

Themen:

Konstruktionen unter Verwendung von Spiegelungen, Drehungen und Drehstreckungen mit Berechnungen von Bildpunkten.

Berechnung von Trägergraphen (Ortskurven)

Demo: Mathe-CD

Datei Nr. 11841

Friedrich W. Buckel

Stand 10. Juli 2007

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort:

Das sehr hohe Niveau für Realschulprüfungen in Bayern hat mich bewogen, einzelne Prüfungsaufgaben, die freigegeben sind, ausführlich zu besprechen.

Vektorrechnung ist m. E. nur in Bayern an Realschulen üblich. Dagegen freuen sich Mathematiklehrer an Gymnasien über diese Aufgaben, denn sie sind interessante Beispiele für die geometrische Anwendung von Vektorrechnung und Abbildungen mit Matrizen.

Was Realschulabsolventen damit anfangen sollen, wissen nur die Bayern….
Als Mathematiker freut man sich allerdings über soviel Kreativität.
Leider fehlt in den Gymnasien in der Klassenstufe 10 die Zeit, diesen Stoff zu behandeln. Dagegen gibt es in der gymnasialen Oberstufe Gelegenheit, solche Themen anzusprechen. Daher werden diese Aufgaben für Gymnasiallehrer wohl auch sehr interessant sein.

Die in Bayern üblichen Schreibweisen und Begriffe wurden nicht immer eingehalten. Jedoch werden die Grundlagen dieses Stoffes in den Texten 11811, 11812 und 11821 ausführlich besprochen. Dort sollte man nachlesen, wenn Unklarheiten auftreten.

Demo: Mathe-CD

Inhalt

Teil 1:	Aufgabensammlung 201 bis 206	1
Teil 2	Aufgaben mit ausführlichen Lösungen	7 bis 40

Die Sammlung wird noch erweitert.

Aufgabensammlung

Aufgabe 201 (2003-1B2)

(Thema: Spiegelung von Vektoren an einer Ursprungsgeraden und Streckung)
Bei der Konstruktion eines Dreiecks ist eine Spiegelung im Spiel!

Aufgabe gegenüber dem Original leicht geändert

Die Punkte $B_n\left(x \mid \frac{1}{2}x - 3\right)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$.
Sie sind zusammen mit dem Punkt $A(-3 \mid -1)$ Eckpunkte von Dreiecken AB_nC_n.
Die gemeinsame Winkelhalbierende w der Winkel B_nAC_n hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x$.
Für die Seiten AC_n und AB_n gelte: $\overline{AC_n} : \overline{AB_n} = 2:1$.

a) Zeichnen Sie die Gerade g, die Winkelhalbierende w sowie das Dreieck AB_1C_1 für $x = 1$ und das Dreieck AB_2C_2 für $x = 3$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm, $-4 \le x \le 9$ und $-4 \le y \le 8$.

b) Man erhält nur für $x \in \left]-2;18\right[$ Dreiecke AB_nC_n.
Ermitteln Sie rechnerisch die Intervallgrenzen.

c) Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n}$ kann man auf die Pfeile $\overrightarrow{AC_n}$ abbilden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n. (Auf eine Dezimale runden.)

(Ergebnis: $C_n(2{,}2x - 0{,}6 \mid 0{,}4x + 5{,}8)$.)

d) Unter den Dreieck AB_nC_n gibt es ein rechtwinkliges Dreieck AB_3C_3 mit der Hypotenuse B_3C_3.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes B_3. (Auf eine Dezimale runden.)

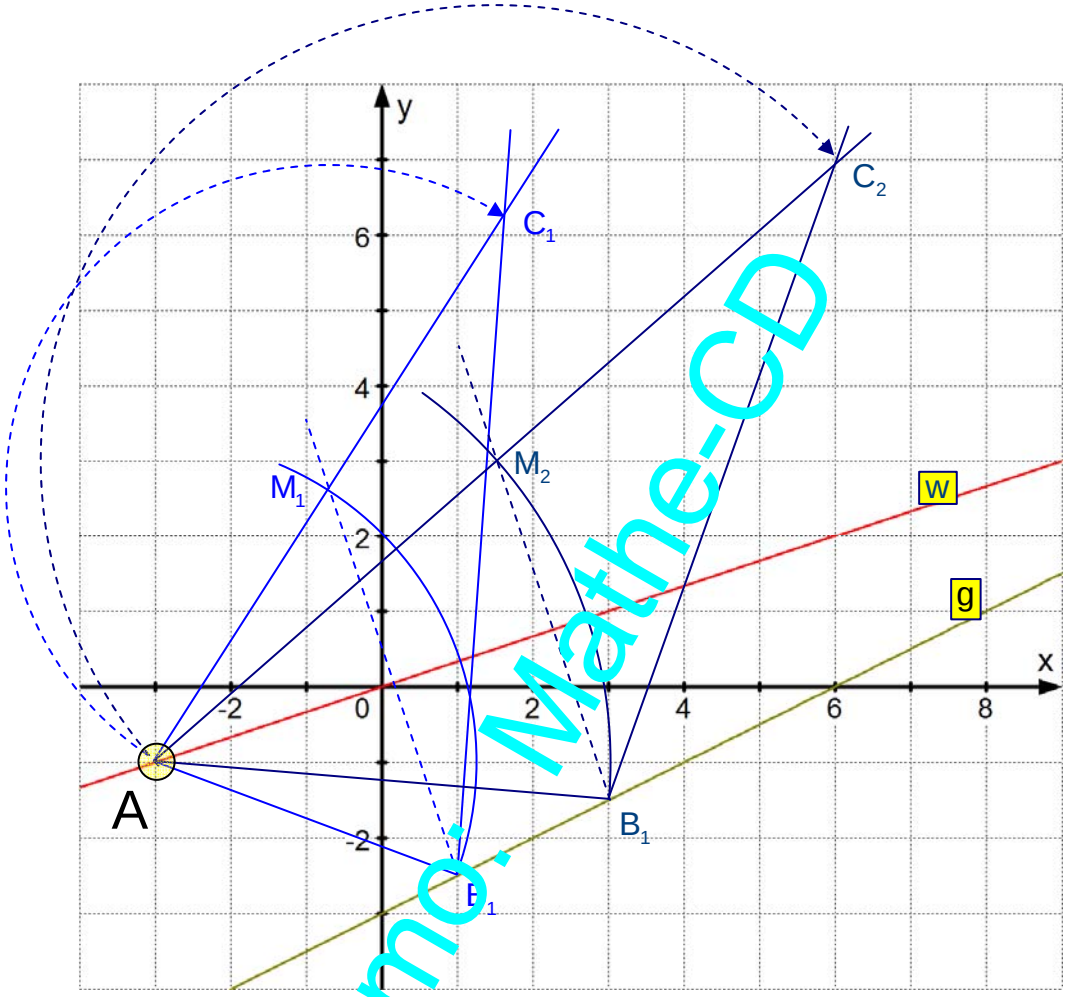
e) Der Punkt C_4 des Dreiecks AB_4C_4 liegt auf der y-Achse.
Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes C_4. (Auf eine Dezimale runden.)

Demo: MatheCD

Lösung 201

a) Abbildung der Dreiecke AB_1C_1 und AB_2C_2.

Gegeben sind die Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ und w mit $y = \frac{1}{3}x$.



Demo: Mathe-CD

Konstruktionsbeschreibung.

1. Schritt: Man zeichnet die Geraden g und w ein sowie die Punkte A, B_1 (1 | -2,5) und B_2 (3 | -1,5).

2. Schritt: Da w die Winkelhalbierende des Winkels α ist, **spiegelt man den Punkt B_1 an w:** Kreisbogen um A durch B_1 und Senkrechte von B_1 zu w ergibt das Spiegelbild M_1.

3. Schritt: Man zeichnet die Halbgerade von A durch M_1 und weiter. Laut Aufgabe ist AC_1 doppelt so lang wie AB_1 also AM_1 . Also zeichnet man um M_1 einen Halbkreis durch A. Dieser schneidet die Halbgerade in C_1. (Man spiegelt also A an M_1 – oder man streckt M_1 von A aus mit dem Faktor 2.)

Jetzt hat man das Dreieck AB_1C_1 (blaue Konstruktionslinien).

Genauso konstruiert man von B_2 aus M_2 und C_2 (violette Linien).

b) Um die Grenzen der Dreiecke zu finden, muss man folgende Überlegung anstellen:

Untere Grenze: Wenn die Strecke AB_n senkrecht zur Winkelhalbierenden w ist, dann hätte $\alpha = 180^{\circ}$. Dies ist in einem Dreieck unmöglich.

1, Lösungsmöglichkeit: (Nicht-vektoriell)

Gegeben ist $B_n\left(x \,|\, \frac{1}{2}x - 3\right)$ für den beliebigen Punkt. Die Steigung von AB_n ist wegen $A(-3\,|\,-1)$ dann

$$m_{AB_n} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}x - 3 - (-1)}{x - (-3)} = \frac{\frac{1}{2}x - 2}{x + 3}$$

Die Winkelhalbierende w hat die Steigung $m_w = \frac{1}{3}$.

Bei Geraden, die orthogonal sind, d. h. aufeinander senkrecht stehen, gilt:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Dies bedeutet dann
$$\frac{\frac{1}{2}x - 2}{x + 3} \cdot \frac{1}{3} = -1$$

bzw.
$$\frac{1}{2}x - 2 = -(x + 3) \cdot 3$$
$$\frac{1}{2}x - 2 = -3x - 9$$
$$\frac{7}{2}x = -7$$
$$x = -2$$

2. Lösung: (Vektoriell)

Es ist
$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x - 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ \frac{1}{2}x - 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor von w (wegen $m_w = \frac{1}{3}$):
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Orthogonalitätsbedingung (Lotbedingung): $\boxed{\overrightarrow{AB_n} \odot \vec{u} = 0}$

$$\begin{pmatrix} x + 3 \\ \frac{1}{2}x - 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(x + 3) \cdot 3 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot 1 = 0$$
$$3x + 9 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$$
$$\frac{7}{2}x + 7 = 0 \quad |:7$$
$$\frac{1}{2}x = -1$$
$$x = -2.$$

Damit haben wir – 2 als untere Grenze für die x-Koordinate von B_n.

Demo: Mathe-CD

Nun zur oberen Grenze:

Die obere Grenze ist dann erreicht, wenn sich w und g schneiden, denn dann fallen B_n und C_n zusammen.

Schnittstelle von g und w:

$$\tfrac{1}{2}x - 3 = \tfrac{1}{3}x \quad |\cdot 6$$
$$3x - 18 = 2x$$
$$x = 18$$

Ergebnis: Für $B_n\left(x \,|\, \tfrac{1}{2}x - 3\right)$ gilt $x \in \left]-2;18\right[$.

c) Der einleitende Satz „Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n}$ kann man auf die Pfeile $\overrightarrow{AC_n}$ abbilden“ wurde in der Konstruktion umgesetzt: Zuerst wurde B_n an der Geraden w gespiegelt und dann von A aus mit dem Faktor 2 gestreckt.

WISSEN:

Die Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, welche mit der x-Achse den Winkel φ einschließt, kann durch diese Abbildungsgleichung berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Aufstellung der Abbildungsgleichung für die Spiegelung an der Ursprungsgeraden w:

w hat die Steigung $m_w = \tfrac{1}{3}$. Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkels, also gilt $\tan\varphi = \tfrac{1}{3}$. Dies liefert einen Winkel von $\varphi = 18{,}43^{\circ}$.

Die Abbildungsgleichungen für Punkte lautet somit:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 36{,}87 & \sin 36{,}87 \\ \sin 36{,}87 & -\cos 36{,}87 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Genauer:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Lösung:

Spiegelung der Punkte $B_n\left(x \,|\, \tfrac{1}{2}x - 3\right)$ nach M_n:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ \tfrac{1}{2}x - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m}_n = \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot x + 0{,}6 \cdot \left(\tfrac{1}{2}x - 3\right) \\ 0{,}6 \cdot x - 0{,}8 \cdot \left(\tfrac{1}{2}x - 3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1x - 1{,}8 \\ 0{,}2x + 2{,}4 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\overrightarrow{AM_n} = \begin{pmatrix} 1{,}1x - 1{,}8 \\ 0{,}2x + 2{,}4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1x + 1{,}2 \\ 0{,}2x + 3{,}4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man den Ortsvektor von C_n:

$$\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM_n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}1x + 1{,}2 \\ 0{,}2x + 3{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 2{,}2x + 2{,}4 \\ -1 + 0{,}4x + 6{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2x - 0{,}6 \\ 0{,}4x + 5{,}8 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $C_n\left(2{,}2x - 0{,}6 \,|\, 0{,}4x + 5{,}8\right)$.

Demo. Mathe-CD

2. Lösung:

Die vektorielle Lösung geht den Weg, dass man mit den Abbildungsgleichungen für Punkte

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vektoren abbildet. Also könnte man wie in der Aufgabe eigentlich gefordert gleich $\overrightarrow{AB_n}$ in $\overrightarrow{AM_n}$ und dann weiter nach $\overrightarrow{AC_n}$ abbilden.

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ setzt man $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix}$, für $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Das Spiegelbild dieses Vektors ist der Vektor $\overrightarrow{AM_n}$. Die Abbildungsgleichung liefert

$$\overrightarrow{AM_n} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix}$$

weil ja $M_n(x' \mid y')$ der Bildpunkt von B_n ist. Anschließend folgt die Streckung dieses Vektors von A aus mit dem Faktor 2:

$$\overrightarrow{AC_n} = 2 \cdot \overrightarrow{AM_n}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & -1{,}6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \cdot (x+3) + 1{,}2 \cdot \left(\frac{1}{2}x-2\right) \\ 1{,}2 \cdot (x+3) - 1{,}6 \cdot \left(\frac{1}{2}x-2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2x+2{,}4 \\ 0{,}4x+6{,}8 \end{pmatrix}$$

Durch eine Vektorsumme erhält man den Ortsvektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC_n}$ des Punktes C_n:

$$\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}2x+2{,}4 \\ 0{,}4x+6{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2x-0{,}6 \\ 0{,}4x+5{,}8 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $C_n(2{,}2x-0{,}6 \mid 0{,}4x+5{,}8)$.

Demo: Mathe-CD

d) Unter den Dreieck AB_nC_n gibt es ein rechtwinkliges Dreieck AB_3C_3 mit der Hypotenuse B_3C_3. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes B_3. (Auf eine Dezimale runden.)

Lösung

Wenn B_3C_3 die Hypotenuse sein soll, dann liegt gegenüber bei A der rechte Winkel. Folglich müssen die Vektoren $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n}$ orthogonal sein, d.h. aufeinander senkrecht stehen.

Wir berechnen zuerst aus $C_n(2{,}2x-0{,}6\,|\,0{,}4x+5{,}8)$ und $A(-3\,|\,-1)$ den Vektor

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2{,}2\,x-0{,}6 \\ 0{,}4\,x+5{,}8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2x+2{,}4 \\ 0{,}4x+6{,}8 \end{pmatrix}.$$

Orthogonalitätsbedingung: $\overrightarrow{AB_n} \odot \overrightarrow{AC_n} = 0$

$$\begin{pmatrix} x+3 \\ \frac{1}{2}x-2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2{,}2x+2{,}4 \\ 0{,}4x+6{,}8 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x+3)(2{,}2x+2{,}4) + (\tfrac{1}{2}x-2)(0{,}4x+6{,}8) = 0$$

$$2{,}2x^2 + 2{,}4x + 6{,}6x + 7{,}2 + 0{,}2x^2 + 3{,}4x - 0{,}8x - 13{,}6 = 0$$

$$2{,}4x^2 + 11{,}6x - 6{,}4 = 0$$

Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen lautet

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-11{,}6 \pm \sqrt{11{,}6^2 - 4 \cdot 2{,}4 \cdot (-6{,}4)}}{4{,}8} = \frac{-11{,}6 \pm \sqrt{196}}{4{,}8} = \frac{-11{,}6 \pm 14}{4{,}8} = \begin{cases} 0{,}5 \\ -5{,}3 \end{cases}$$

Da $x_2 = -5{,}3 \notin \,]-2\,;18\,[$ scheidet diese Lösung aus.

Ergebnis: Für $x = 0{,}5$ ist das Dreieck AB_3C_3 bei A rechtwinklig.

Übrigens sind die Eckpunkte dann $B_3(0{,}5\,|\,-2{,}75)$ und $C_3(0{,}5\,|\,6)$.

Bemerkung:

Man könnte diese Aufgabe auch nicht-vektoriell lösen. Dazu berechnet man die Steigung der Geraden (AB_n) und die von (AC_n)

$$m_{AB_n} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}x-3-(-1)}{x-(-3)} = \frac{\frac{1}{2}x-2}{x+3}, \quad m_{AC_n} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}2x-0{,}6-(-1)}{0{,}4x+5{,}8-(-3)} = \frac{2{,}2x+0{,}4}{0{,}4x+8{,}8}$$

und verlangt, dass ihr Produkt -1 ist.

Daraus folgt natürlich dieselbe quadratische Gleichung wie oben.

Demo: Mathe-CD

e) Der Punkt C_4 des Dreiecks AB_4C_4 liegt auf der y-Achse.
Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes C_4. (Auf eine Dezimale runden.)

Lösung

Damit $C_n\left(2{,}2x-0{,}6\,|\,0{,}4x+5{,}8\right)$ auf der y-Achse liegt, muss seine x-Koordinate 0 sein:

$$2{,}2x-0{,}6=0$$
$$2{,}2x=0{,}6$$
$$x=\frac{0{,}6}{2{,}2}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}$$

Dies ist x_B!!!

Berechnung von y_C: $y_{Cn}=0{,}4\cdot\frac{3}{11}+5{,}8=\frac{12+5{,}8\cdot 11}{11}=\frac{65}{11}\approx 5{,}9$

Demo: Mathe-CD